Musterlösung 5

1. Wir bezeichnen mit A das Ereignis zu spät zu kommen und mit B das Ereignis, dass es anfängt zu regnen. Da es entweder nur regnen oder schneien kann, ist B^c das Ereignis, dass es zu schneien anfängt. Wir wenden die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit an und erhalten

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{25}.$$

2. a) i) Es gilt

$$(B \cap C) \subset B$$

und folglich wegen der Monotonie

$$0 < P(B \cap C) \leq P(C)$$

ii) Durch das Anwenden der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$P(A|B \cap C)P(B|C)P(C) = \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C).$$

b) i) Es gilt

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]P(C) \\ &= P(A \cup B)P(C) \end{aligned}$$

ii) Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

gilt.

Deren Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_A$ und $\mathbf{1}_B$ sind unabhängig, falls

$$P(\mathbf{1}_A = a, \mathbf{1}_B = b) = P(\mathbf{1}_A = a)P(\mathbf{1}_B = b)$$

Bitte wenden!

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Wir beobachten, dass für die Menge $\{\mathbf{1}_A = a\}$ gilt:

$$\{\mathbf{1}_A = a\} = \{\omega \mid \mathbf{1}_A(\omega) = a\} = \begin{cases} A & \text{für } a = 1, \\ A^c & \text{für } a = 0, \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

Analoge Aussagen gelten für die Variablen $\mathbf{1}_B$ und $\mathbf{1}_C$, woraus die Unabhängigkeit durch einsetzen folgt.

3. Sei A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ das Ereignis, dass dein Gegner genau i Damen in der Hand hat. Diese sind paarweise disjunkt. Für $i = 0, \ldots, 4$ erhalten wir

$$P(A_i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{52-4}{5-i}}{\binom{52}{5}}.$$

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} P(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \frac{P\left((A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)\right)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} \\ = \frac{P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} = \frac{1 - P(A_0) - P(A_1)}{1 - P(A_0)} &= \frac{108'336}{886'656} \approx 0.12. \end{aligned}$$

b) Sei D die Wahrscheinlichkeit, dass dein Gegner die Herz-Dame in der Hand hat. Dann haben wir

$$P(D) = \frac{\binom{52-1}{4}}{\binom{52}{5}}.$$

Zusätzlich erhalten wir für $i = 1, 2, 3, 4$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A_i \cap D) = \frac{\binom{3}{i-1}\binom{52-4}{5-i}}{\binom{52}{5}}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \mid D) &= \frac{P((A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P((A_2 \cap D) \cup (A_3 \cap D) \cup (A_4 \cap D))}{P(D)} \\ &= \frac{P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D) + P(A_4 \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{55'320}{249'900} \approx 0.22. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung erhalten wir durch die Tatsache, dass $(A_i \cap D)$ paarwise disjunkt sind.

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir definieren die (paarweise disjunkten) Ereignisse $K_i =$ ‹Der Patient hat die Krankheit k_i› for $i = 1, 2, 3$. Wir definieren mit $T_{+,-}$ das Ereignis, dass der erste Test positiv und der zweite negativ war. Analog definieren wir $T_{+,+}$, $T_{-,+}$, und $T_{-,-}$.

a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} P(K_1) &= \frac{3'215}{10'000} = 0.3215, \\ P(K_2) &= \frac{2'125}{10'000} = 0.2125, \\ P(K_3) &= \frac{4'660}{10'000} = 0.466. \end{aligned}$$

Beachte, dass $P(K_1) + P(K_2) + P(K_3) = 1$ gilt.

b) Mit dem Satz von Bayes erhalten wir

$$\begin{aligned} P(K_3 \mid T_{+,+}) &= \frac{P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{+,+})} \\ &= \frac{P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{+,+} \mid K_1)P(K_1) + P(T_{+,+} \mid K_2)P(K_2) + P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)} \\ &= \frac{\frac{510}{4'660} \cdot 0.466}{\frac{2'110}{3'215} \cdot 0.3215 + \frac{396}{2'125} \cdot 0.2125 + \frac{510}{4'660} \cdot 0.466} \approx 0.17, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K_3 \mid T_{-,-}) &= \frac{P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{-,-})} \\ &= \frac{P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{-,-} \mid K_1)P(K_1) + P(T_{-,-} \mid K_2)P(K_2) + P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)} \\ &= \frac{\frac{509}{4'660} \cdot 0.466}{\frac{100}{3'215} \cdot 0.3215 + \frac{410}{2'125} \cdot 0.2125 + \frac{509}{4'660} \cdot 0.466} \approx 0.50. \end{aligned}$$